A mediáció szerepe többszereplős rendszerek szabályozásában: játékelméleti megközelítés

Forgó Ferenc
Budapesti Corvinus Egyetem

Absztrakt Egy többszereplős rendszerben (játékban) a teljes decentralizáció és a teljes központosítás két véglet. Lehetőség van azonban olyan mediátoroknak a beiktatására és olyan szabályzat (protokoll) megtervezésére, amelyek közbülső állapotokat is elő tudnak állítani és az adott keretek között a rendszer teljesítményét maximalizálják. Ebben a cikkben bemutatjuk, hogyan lehet ezt megvalósítani a korrelált egyensúly különböző protokolljait használva. A korreláció három formáját vizsgáljuk: a klasszikus korrelált egyensúlyt (Aumann, 1974), a gyenge korrelált egyensúlyt (Moulin és Vial, 1978) és a puha korrelált egyensúlyt (Forgó, 2010). A játékosztály, amelyen a különböző fogalmakat illusztráljuk a többcsatornás kiszolgáló rendszerek osztálya. Ezen az osztályon mutatjuk be a mediáció és a kényszerítés erejének mérését. Új eredményként a fogolydilemmát interpretáljuk, mint egy kétcsatornás kiszolgáló rendszert és meghatározzuk a mediáció és a kényszerítés erejét a puha korrelált egyensúly esetében.

Abstract In a multi-agent system (game) complete decentralization and total centralization are only two extremes. With the help of mediation and an appropriate protocol partially controlled systems (agents can freely choose actions if they abide by the rules) can be devised and optimized to enhance system performance. In this paper we show how this can be done by various protocols of correlated equilibria. We consider three versions of correlated equilibrium: the classical correlated equilibrium of Aumann (1974), the weak correlated equilibrium of Moulin and Vial (1978) and the soft correlated equilibrium of Forgó (2010). The class of games where the working of these correlated equilibria are studied is the class of multi-facility service systems. Measures of the value of mediation and enforcement are discussed for the soft correlated equilibrium. The main result of the paper is the representation of the prisoners' dilemma as a two-facility simple congestion game and the determination of the mediation and enforecement value of the class of prisoners' dilemma games when mediation goes by the protocol of the soft correlated equilibrium.

A korrelált egyensúly és két általánosítása

Tekintsünk egy $G = \{S_1, ..., S_n; f_1, ..., f_n\}$ n-szereplős rendszert (játék normál formában), ahol az $S_1, ..., S_n$ véges halmazok a szereplők (játékosok) lehetséges stratégiái (akciói), a stratégiaprofilok $S = \times_{i=1}^{n} S_i$ halmazán értelmezett $f_1, ..., f_n$ függvények pedig a játékosok hasznossági (kifizető-) függvényei. A kevert bővítés fogalmát most tágabban értelmezzük, mint a Nash egyensúly (NEP) esetében, ahol a leggyakoribb interpretációban feltesszük azt, hogy a játékosok egymástól függetlenül, kevert stratégiájuk (valószínűségeloszlás a saját stratégiahalmazon) által meghatározottan, véletlenszerűen választanak tiszta stratégiát. Ehhez mindegyik külön-külön egy véletlen mechanizmust (random device, RD) használ. Ezek az eloszlások egy valószínűségeloszlást generálnak az $S = \times_{i=1}^{n} S_i$ stratégiaprofilok véges halmazán. Ha félretesszük azt a feltételezést, hogy az egyéni randomizálások egymástól függetlenek, akkor bővülnek a lehetőségek: tetszőleges valószínűségeloszlást használhatunk S-en egy stratégiaprofil véletlenszerű kiválasztására. Ez tulajdonképpen a stratégiaválasztások összehangolása (korrelálása), innen az elnevezés.

Az egyszerűség kedvéért először kétszemélyes (bimátrix) játékokat tekintünk, a több személyre való kiterjesztés csak jelölésbeli kellemetlenségeket okozna, a lényeg ugyanaz. Jelöljük az első (sor) játékos stratégiáinak halmazát I-vel, a másodikét (oszlop) J-vel, az első játékos kifizetéseit a_{ij}, a másodikét b_{ij}-vel, $i \in I, j \in J$. Jelölje $A=[a_{ij}]$ és $B=[b_{ij}]$ a két játékos kifizetőmátrixát. Legyen p_{ij} az (i,j) stratégiaprofil választásának valószínűsége. A p_{ij} valószínűségeket rendezzük el egy P mátrixban, amely nyilván nem negatív és az elemeinek összege 1. A P mátrix köztudott, minden nszereplő tudja, mindenki tudja, hogy a többiek is tudják, és így tovább. Ezt a valószínűségeloszlást és az azt reprezentáló P mátrixot korrelált stratégiának nevezzük. Ez már nem a szó eredeti értelmében vett stratégia és talán az elnevezés sem szerencsés, de általában ez használatos.

A véletlen választást, az RD-t, egy "mediátor" működteti. Amint a választás megtörtént, a mediátor az első játékosnak titokban úgy, hogy a második ezt ne tudja, javasolja, hogy az i stratégiát játssza. Ugyanígy javasolja a második játékosnak, hogy a j stratégiát játssza. A korrelált stratégiát korrelált egyensúlynak (CE) hívjuk, ha várható értékben egyik játékosnak sem érdeke a játékvezető javaslatát elutasítani és valami mást játszani, mint az éppen javasolt, feltéve, hogy a másik játékos megfogadja a játékvezető javaslatát. Itt tulajdonképpen a játék valódi lejátszását megelőző forgatókönyvet (pre-game scenario), más néven protokollt adtuk meg. Ez a protokoll a korrelált egyensúly feltalálójának, Aumannak (1974) a nevéhez fűződik.

A fentiek alapján a korrelált egyensúlyok halmaza egyenlő az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszer összes megoldásainak halmazával:

$$\begin{aligned}
&p_{ij} \geq 0,\ i \in I,\ j \in J \\
&\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{ij} = 1 \\
&\sum_{j \in J} (a_{ij} - a_{kj}) p_{ij} \ \geq 0 \quad i,k \in I \qquad\qquad (1) \\
&\sum_{i \in I} (b_{ij} - b_{il}) p_{ij} \ \geq 0 \quad j,l \ \in J.
\end{aligned}$$

Ezt az egyenlőtlenségrendszert használhatjuk a korrelált egyensúly formális definíciójára is. Az egyenlőtlenségeket szokás "ösztönző feltételeknek" (incentive constraints) nevezni.

1. Példa Tekintsük a közismert „gyáva nyúl” (game of chicken) játékot a szokásos autós interpretációval, amelyben a kifizetőfüggvények a következők (N: nem tér ki, K: kitér):

1 játékos kifizetései

	K	N
K	6	2
N	7	0

2 játékos kifizetései

	K	N
K	6	7
N	2	0

Ekkor a korrelált egyensúlyok halmazát leíró egyenlőtlenségrendszer a következő:

$$
\begin{aligned}
&p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22} \geq 0 \\
&p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} = 1 \\
&(6-7)p_{11} + (2-0)p_{12} \geq 0 \\
&(7-6)p_{21} + (0-2)p_{22} \geq 0 \\
&(6-7)p_{11} + (2-0)p_{21} \geq 0 \\
&(7-6)p_{12} + (0-2)p_{22} \geq 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

A három NEP által meghatározott CE-k:

(i) $p_{11} = 0, p_{12} = 1, p_{21} = 0, p_{22} = 0;$
(ii) $p_{11} = 0, p_{12} = 0, p_{21} = 1, p_{22} = 0;$
(iii) $p_{11} = 4/9, p_{12} = 2/9, p_{21} = 2/9, p_{22} = 1/9.$

Általában végtelen sok CE létezik. Ezek közül lehet úgy választani (pl. a mediátor vagy megbízója választhat), hogy a rendszer egészének hatékonyságát maximalizáljuk a CE-k halmazán és a kiválasztott CE-t majd a játékvezető implementálja egy megfelelő RD segítségével. Ha a játékosok hasznosságai összeadhatók, akkor egy ilyen cél lehet a hasznosságok összegének a maximalizálása. Nevezzük a hasznosságok összegét a szokásos szóhasználattal társadalmi hasznosságnak (social welfare, SW). Az így kapott CE egyszerre valósít meg „kollektív" hasznosságot és stabilitást, abban az értelemben, hogy a kollektív „optimum" önmegvalósító (self enforcing), ha a játékosok hajlandók a játék szabályait elfogadni (azt tehát, hogy a mindenki által ismert eloszlás szerint sorsol a játékvezető és a leírt titoktartási szabályokat betartják).

A fenti gyáva nyúl példában $p_{11} = 1/2, p_{12} = 1/4, p_{21} = 1/4, p_{22} = 0$, az egyetlen CE, amely maximalizálja a hasznosságok összegét, amiről meggyőződhetünk, ha a $12p_{11} + 9p_{12} + 9p_{21}$ célfüggvényű és a (2) feltételrendszerű lineáris programozási feladatot megoldjuk.

A CE-t nem csak bimátrix játékokra, hanem akárhány személyes véges játékra is lehet definiálni. Sőt, végtelen játékokra is, de ezzel nem foglalkozunk. A CE itt is egy valószínűségeloszlás a játék lehetséges kimenetelein. Az interpretáció teljesen ugyanaz: a játékvezető kisorsol egy stratégia n-est, majd minden játékosnak titokban javasolja, hogy játssza a kisorsolt stratégiát. Ekkor egyetlen játékos sem tudja javítani a várható kifizetését azzal, hogy eltér a játékvezető által javasolt stratégiától.

Felmerült az a kérdés, hogy a CE további általánosításával lehetne-e még nagyobb SW-t elérni. Moulin és Vial (1978) tértek el először az Aumann-féle protokolltól. Nagyobb elkötelezettséget követelnek a játékosoktól: a játék lejátszása előtti fázisban dönteniük kell, hogy vakon követik-e a játékvezető javaslatát a sorsolás megtörténte után, vagy nem akarják elkötelezni magukat, amikor is nem kapnak semmilyen javaslatot, de azt csinálhatnak, amit akarnak. Valami olyasmire gondolhatunk, mint amikor valakinek döntenie kell, hogy szabad kezet adjon-e a brókerének a befektetés kiválasztásához, vagy pedig saját maga hozza meg a befektetési döntést.

Szemléletes, ha a forgatókönyvet a következőképpen képzeljük el. A játékvezető elvégzi a sorsolást az adott, közismert valószínűségeloszlás szerint. A kisorsolt stratégiákat beteszi az egyes játékosok számára kijelölt piros borítékokba. A játékosok valamennyi stratégiáját, azt is, amelyik a piros borítékban van, beteszi egy fehér borítékba. A játékosok egymástól függetlenül (szimultán) választanak a piros és a fehér boríték közül. Ha egy játékos a pirosat választotta, akkor azt a stratégiát kell végrehajtania, ami a borítékban van. Ha a fehéret választotta, akkor szabadon választ a borítékban lévő stratégiák közül, vagyis a stratégiahalmazából bármelyiket választhatja. A valószínűségeloszlást, amely szerint a játékvezető a sorsolást végzi, gyenge korrelált egyensúlynak (weak correlated equilibrium, WCE)-nek fogjuk nevezni, ha egyik játékosnak sem érdeke egyoldalúan meváltoztatni a piros boríték választását fehérre. Más elnevezés is ismert a szakirodalomban. A leggyakoribb a Young (2004) által bevezetett "coarse correlated equilibrium" elnevezés.

Persze a WCE csak akkor életképes általánosítás, ha van olyan játék, ahol jobb SW értéket ad, mint a CE. Moulin és Vial (1978) következő példája ilyen.

2. Példa Tekintsük a következő bimátrix játékot:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ennek egy NEP-je van: az első játékos az első sort, a második az első oszlopot választja és a kifizetés $(3,3)$. Könnyen igazolható, hogy

$$P= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

egy WCE, amely a $(\frac{10}{3}, \frac{10}{3})$ várható kifzetést adja és ez szigorúan Paretodominálja a $(3,3)$ kifizetést.

Felmerül a kérdés, hogy nem lehet-e a CE protokollját másképpen megváltoztatni úgy, hogy továbbra is a CE általánosítását kapjuk, de olyan játékok esetében is (nem mindegyiknél természetesen) el tudunk érni Pareto-jobb kifizetéseket, amelyeknél a WCE ezt nem tudja megtenni. A következő protokoll alapján Forgó (2010) a CE egy új általánosítását vezette be, amelyet "puha korrelált egyensúlynak" (soft correlated equilibrium, SCE) nevezett. A protokoll leírásánál célszerű ismét a "borítékos" interpretációt használni a szemléletesség kedvéért.

Most is azzal kezdünk, hogy a játékvezető egy köztudott valószínűségeloszlás szerint kisorsol egy stratégiaprofilt. Minden játékos számára a saját piros borítékjába teszi a kiválasztott stratégiát. A fehér borítékjába a többi stratégiákat.

Vegyük észre a WCE-től való eltérést: míg ott minden akciót elhelyezett a játékvezető a fehér borítékba, itt a kiválasztott (piros borítékban lévő) akciót nem. Innentől kezdve a protokoll ugyanaz. A játékosok szimultán választanak a piros és a fehér borítékok közül. A valószínűségeloszlást SCE-nek nevezzük, ha várható értékben egyik játékosnak sem érdeke a fehér borítékot választani, feltéve, hogy az összes többi a pirosat választotta. Forgó (2010)-ben találhatunk példákat arra, hogy az SCE ott is tud javítani az SW-n a CE-hez képest, ahol a WCE nem.

Egy másik interpretációban lehet az egész protokollra úgy gondolni, hogy van egy klub, és a játékosok szabadon dönthetnek arról, hogy belépnek-e. Tudják, hogy a klubtagság előnyökkel és hátrányokkal is járhat. Előny, hogy a sorsolás után a kisorsolt stratégiák csak a klubtagok számára lehetőségek, a kívül maradottaknak nem. Hátrány, hogy ha belépnek a klubba, a klub szabályzata kimondja, hogy feltétlenül engedelmeskedni kell és azt az akciót kell végrehajtani, amely ki lett sorsolva. SCE-ben senkinek sem érdeke a klubból kilépni, ha a többiek benn maradnak. Különböző játékokban konkrét formát ölt a "klub", a "szabályok", a "stratégiák" stb.

Mi a viszony az SCE és a WCE között? Az világos, hogy mindegyik legalább olyan jól teljesít, mint a CE. Azt is könnyű látni (Forgó (2010)), hogy bináris játékokban (minden játékosnak csak két lehetséges stratégiája van) az SCE legalább olyan jól teljesít, mint a WCE. Általában azonban nem lehet kimondani, hogy egyik jobban teljesítene, mint a másik. Lehet olyan példát mutatni, hogy még szimmetrikus bimátrix játék esetében is a WCE "jobb", és az okát is tudjuk. A kétféle általánosítás információs struktúrája különböző. Az SCE esetében, amikor egy játékos úgy dönt, hogy nem igényli a játékvezető közreműködését, akkor kisebb a választási lehetősége (egy stratégiát nem választhat), de több információja van, hiszen tudja, hogy mi az, amit nem választhat és ennek az információnak a felhasználásával meg tud határozni egy, az ismert a-priori eloszlásnál pontosabb posterior valószínűségeloszlást. A WCE-nél nagyobb a választási lehetőség, de nincs lehetőség a valószínűségeloszlás pontosítására. Az hogy mi az eredője ennek a két hatásnak, a konkrét játéktól, vagy játékosztálytól függ.

Többcsatornás, torlódásos rendszerek hatékonyságának növelése korrelációval és a hatékonyság mérése

Ha különböző korrelált egyensúly koncepciók (CE, WCE, SCE) "erejét" szeretnénk összehasonlítani abból a szempontból, hogy mennyire növeli az SW-t a NEP-hez képest, többféle megközelítést alkalmazhatunk. A számítástudományban jól bevált az u.n. legrosszabb eset elemzés (worst-case analysis) és az átlagos eset elemzés (average case analysis). Az előbbit használva azt határozzuk meg, hogy egy problémaosztályon belül a legrosszabb esetben mennyire javul az SW értéke abszolut vagy relatív értelemben valamely korrelált egyensúly forgatókönyvének alkalmazásával. Az utóbbit használva a problémaosztályból véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint választunk egy problémát, arra alkalmazzuk a korrelációt és a korreláció eredményeképpen kapott átlagos javulást tekintjük mértéknek. Ezen kívül még vannak más megközelítések is.

Az első, és talán a legszebb példája a legrosszabb eset elemzésnek játékelméleti kontextusban Roughgarden és Tardos (2002) munkája, akik egy költségalapú torlódási játékban határozták meg az "anarchia árát" (price of anarchy), ami a legrosszabb NEP társadalmi költségének és a minimális társadalmi költségnek a hányadosa. Ez utóbbi csak diktatórikus eszközökkel érhető el általában, míg ha a játékosokat teljesen magukra hagyjuk (hagyjuk az anarchiát) és feltételezzük, hogy így is kialakul az egyensúly, akkor a legrosszabb esetet hasonlítjuk össze a legjobbal. A hányadosnak a maximuma a torlódási játékok egy osztályában az anarchia ára.

Ha nem a NEP a viszonyítási alap, hanem a korrelált egyensúly valamilyen fajtája és ugyanezt a megközelítést alkalmazzuk, akkor egy "alacsonyabb szintű" irányított anarchia árát kaphatjuk meg. Christodoulou és Koutsoupias (2005) kiszámították a CE esetében az anarchia árát a torlódási játékok egy osztályára. Ashlagi et al. (2008) társadalmi költségek helyett a társadalmi jóléttel számoltak. Első látásra úgy tűnik, mintha ez nem lenne lényeges különbség, de az említett szerzők meggyőző példákat mutatnak arra, hogy egészen eltérő eredményeket kaphatunk a két megközelítéssel. Mi a következőkben ez utóbbit választjuk, tehát a játékosok kifizetőfüggvényeinek összegeként értelmezett SW-t hasonlítjuk össze az "anarchia fokára" tett különböző feltételezések mellett.

Nézzük a mérőszámok formális definícióit. A háromféle korrelált egyensúly közül az SCE-t választjuk (hiszen az új eredményünk is erre vonatkozik), de a CE és WCE esetében is hasonlóak a definíciók.

Az SCE erejének mérésére két mutatószámot használunk, amelyeket Ashlagi et al (2008) javasoltak a CE-re. Ezek a "mediációs érték" (mediation value) és a "kényszerítési érték" (enforcement value).

Legyen C a véges játékok egy osztálya és $G \in C$. Jelölje $P(G)$ a G stratégiaprofiljain értelmezett összes valószínűségeloszlások halmazát, $M(G)$ a G kevert NEP-jei által generált valószínűségeloszlások halmazát, $MP(G)$ a G játék tiszta Nash egyensúlypontjai ($PNEP$) által generált valószínűségeloszlások halmazát, és $S(G)$ az SCE-k halmazát. Jelöljük $SW(p)$-vel a p eloszláshoz tartozó várható társadalmi hasznosságot (a játékosok várható hasznosságainak az összege). Definiáljuk az SCE-hez tartozó $MV(G)$ és $MVP(G)$ mediációs értékeket a következőképpen (a maximumok az érintett halmazok kompaktsága miatt léteznek)

$$MV(G) = \frac{\max_{p \in S(G)} SW(p)}{\max_{p \in M(G)} SW(p)}, \qquad MVP(G) = \frac{\max_{p \in S(G)} SW(p)}{\max_{p \in MP(G)} SW(p)}$$

az $EV(G)$ kényszerítési értéket pedig az alábbi módon

$$EV(G) = \frac{\max_{p \in P(G)} SW(p)}{\max_{p \in S(G)} SW(p)}.$$

Az SCE-nek az MV és $MPVP$ mediációs értékeit és az EV kényszerítési értékét a C játékosztályon pedig így definiáljuk

$$MV = \sup_{G \in C} MV(G), \qquad MVP = \sup_{G \in C} MVP(G), \qquad EV = \sup_{G \in C} EV(G).$$

Az MV és az MVP tulajdonképpen egy "legjobb-eset elemzés" eredménye. Minél nagyobb az MV és az MVP értéke, annál többet javít az SW-n a játékot megelőző "mediáció" (nevezzük így a játékvezető ténykedését is tartalmazó protokollt) a legjobb esetben. Az EV egy valódi "legrosszabb-eset elemzés" eredménye és azt mutatja, hogy (relatíven) maximum mennyit veszíthetünk az SW maximumához képest. Nyilván az $MV = \infty$, $MVP = \infty$ és az $EV = 1$ a legjobb értékek.

A játékosztály, amit tekintünk, az egyszerű torlódási játékok (többcsatornás torlódásos rendszerek) osztálya. Az egyszerű torlódási játékokban a játékosok választhatnak bizonyos kiszolgálók között, amelyeknek a szolgálatait szeretnék igénybe venni. Egy játékos hasznossága (kifizetése) csak attól függ, hogy hányan használják (választották) az illető kiszolgálót. Például, ha a közlekedők választhatnak két alternatív útvonal között, amelyek A várost B várossal kötik össze akkor, ha sok közlekedő választja az egyik utat ezáltal torlódást és lassulást okozva, akkor az ezen úton haladók hasznossága csökken a használók számának növekedésével. Forgó (2014) foglalkozik ezeknek a rendszereknek a hatékonyságával két kiszolgáló esetében feltéve, hogy a torlódás növekedésével egy játékos hasznosssága lineárisan csökken és az SCE protokollját alkalmazzuk. Az eredményeket röviden az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

Játékosok száma	MV	MVP	EV
2	∞	∞	1
3	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	1
4	?	$\geq \frac{4}{3}$	1.007478...
...	...	...	...
n	?	$\geq \frac{n^2}{4(n-1)}$	$\leq \frac{4}{3}$

A fogolydilemma, mint kétszemélyes, kétcsatornás torlódási rendszer

A fogolydilemma (prisoners' dilemma, PD), mint az közismert, egy olyan szimmetrikus bimátrix játék, amelyet a $0 \leq c < b < a < d$ hasznosságok (kifizetések) határoznak meg:

$$\begin{array}{ccc} & C & D \\ C & (a,a) & (c,d) \\ D & (d,c) & (b,b) \end{array}.$$

A szokásos interpretációban C jelöli a "kooperál" cselekvést, D a "nem kooperál" (defect) cselekvést. Az egyetlen NEP a (D, D) stratégiaprofil, amelyet a (C, C) stratégiaprofil Pareto-dominál. Az utóbbi viszont nem NEP. Az is ismert, hogy a (D, D)-t 1 valószínűséggel játszani az egyetlen CE és mivel a PD egy bináris játék, ez egyúttal az egyetlen WCE is. Viszont, mint az Forgó (2010)-ben be van bizonyítva, az SCE tud a (D, D) stratégiaprofilon Pareto-javítani. Az a kérdés viszont megválaszolatlan maradt, hogy melyek a lehetőségei és korlátai az SCE-nek az SW növelésében, ha az összes PD játékot tekintjük. Más szóval mennyi a PD mediációs és kényszerítési értéke.

Az világos, hogy a PD egy kétszemélyes, kétcsatornás torlódási rendszer. A két "csatorna", amelyek közül a két játékosnak választani kell a C és a D. Viszont a kifizetések csökkenése a "torlódás" növekedésével csak a D csatornára igaz, a C csatornára a helyzet fordított, a torlódás növekedése (nem egy, hanem két játékos választja a kooperációt) növeli a kooperáló játékos kifizetését. Így a Forgó (2014)-ben található elemzés nem vonatkozik erre az esetre. Hasonló módszerrel azonban ekkor is meg lehet határozni az MV és az EV értékét.

Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy a hasznosságok úgy vannak normalizálva, hogy $c = 0$ és $d = 1$.

Abból a célból, hogy meghatározzuk azt az SCE-t, amely maximalizálja az SW-t, meg kell oldanunk az alábbi lineáris programozási feladatot (lásd Forgó (2010)):

$$\begin{gathered}\max 2ap_{11} + p_{12} + p_{21} + 2bp_{22} \\ (1-a)p_{11} + bp_{12} + (a-1)p_{21} - bp_{22} \leq 0, \\ (1-a)p_{11} + (1-a)p_{12} + bp_{21} - bp_{22} \leq 0, \\ p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} = 1, \\ p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22} \geq 0.\end{gathered} \tag{3}$$

A (3) feladat optimális megoldásai között biztosan van szimmetrikus is, vagyis olyan, amelyre $p_{12} = p_{21}$. Ennek belátása céljából tegyük fel, hogy $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$ a (3) feladat optimális megoldása. Definiáljuk a $q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}$ valószínűségeloszlást a következőképpen $q_{11} = p_{11}, q_{12} = \frac{1}{2}(p_{12} + p_{21}), q_{21} = \frac{1}{2}(p_{12} + p_{21}), q_{22} = p_{22}$. A $q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}$ valószínűségek szintén optimális megoldásai a (3) feladatnak, amit könnyen beláthatunk, ha belyettesítjük a feltételekbe, majd utána a célfüggvénybe és konstatáljuk, hogy ugyanakkora a célfüggvényértéke a $q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}$ valószínűségeloszlásnak, mint a $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$-nek.

Ha definiálunk egy új $p = p_{12} = p_{21}$ változót, akkor ahhoz, hogy megkapjuk az optimális SW (tulajdonképpen az $\frac{1}{2}SW$) értékét, elég megoldanunk az alábbi lineáris programozási feladatot:

$$P: \quad \begin{gathered}\max ap_{11} + p + bp_{22} \\ (1-a)p_{11} + (a+b-1)p - bp_{22} \leq 0, \\ p_{11} + 2p + p_{22} = 1, \\ p_{11}, p, p_{22} \geq 0.\end{gathered}$$

A P duálisa

$$D: \quad \begin{array}{c} \min v \\ (1-a)u + v \geq a, \\ (a+b-1)u + 2v \geq 1, \\ -bu + v \geq b, \\ u \geq 0, v \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Az a és b paraméterek különböző értékeire a P és D egy-egy optimális megoldását és az optimális célfüggvényértéket ($z = \frac{1}{2}SW$) az alábbi táblázatban láthatjuk:

	P opt. megoldása	D opt. megoldása	$z = \frac{1}{2}SW$
$a+b>1$	$(\frac{b}{1-a+b}, 0, \frac{1-a}{1-a+b})$	$(\frac{a-b}{1-a+b)}, \frac{b}{1-a+b})$	$\frac{b}{1-a+b}$
$a+b \leq 1 < 2a$	$(\frac{1-a-b}{3(1-a)-b}, \frac{1-a}{3(1-a)-b}, 0)$	$(\frac{2a-1}{3(1-a)-b}, \frac{(1-a)(1+a)-ab}{3(1-a)-b})$	$\frac{(1-a)(1+a)-ab}{3(1-a)-b}$
$2a \leq 1$	$(0, \frac{1}{2}, 0)$	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$

Ezeknek a megoldásoknak az optimalitását úgy ellenőrizzük, hogy behelyettítjük őket a megfelelő P és D feladatba, majd megállapítjuk, hogy a primál-duál feladatpár célfüggvényértékei egyenlők, amelyből a lineáris programozás dualitás tétele alapján következik az optimalitás. Ezt a feladatot az olvasóra bízzuk, egy kis algebra és figyelem szükséges hozzá.

Az EV definíciójából következik, hogy egy adott PD-re, egy paraméteregyüttesre a paraméterek különböző tartományaiban az alábbi táblázatban látható értékeket kapjuk:

	$\max SW$	$\max SCE$	EV arány
$a+b>1$	$2a$	$\frac{2b}{1-a+b}$	$\frac{a(1-a+b)}{b}$
$a+b \leq 1 < 2a$	$2a$	$\frac{2(1-a)(1+a)-2ab}{3(1-a)-b}$	$\frac{3a(1-a)-ab}{(1-a)(1+a)-ab}$
$2a \leq 1$	1	1	1

Azonnal láthatjuk, hogy a harmadik esetben az EV felső határa 1. Most megmutatjuk, hogy az EV felső határa nem lehet több, mint 2 az első két esetben. Ebből a célból először azt látjuk be, hogy

$$\frac{a(1-a+b)}{b} \leq 2, \quad (4)$$

ha $a+b>1$. A (4) egyenlőtlenség átrendezésével kapjuk az $a(1-a-b)+2ab \leq 2b$ egyenlőtlenséget, amely fennáll, hiszen $0<a<1, 1-a-b<0$.

A második esetben az alábbi egyenlőtlenséget kell bizonyítani:

$$\frac{3a(1-a)-ab}{(1-a)(1+a)-ab} \leq 2.$$

Ezt átrendezhetjük a

$$a^2 - 3a - ab + 2 \geq 0 \qquad (5)$$

formára. Tekintsük most a következő kétváltozós, konvex kvadratikus programozási feladatot, amelynek a lehetséges tartománya a második esetre vonatkozó paraméter-tér lezárása:

$$\begin{array}{c} \min a^2 - 3a - ab + 2 \\ a + b \leq 1 \\ 2a \geq 1 \\ 0 \leq a \leq 1 \\ 0 \leq b \leq 1 \end{array} .$$

Elemi feltételes szélsőérték számítással be lehet látni, hogy ennek a feladatnak az optimális célfüggvényértéke 0. Ezért az (5) egyenlőtlenség fennáll. Ezzel beláttuk azt, hogy $EV \leq 2$.

Tekintsük most azt a PD-t, amelynek a paraméterei $a = 1-\varepsilon, b = \varepsilon$ valamely $0 < \varepsilon < 1$-ra. Ez a második esetbe tartozik. Behelyettesítve a táblázatban található kifejezésbe, azt kapjuk, hogy az EV arány $\frac{2-2\varepsilon}{1-\varepsilon}$, amely 2-höz tart, ha $\varepsilon \to 0$. Mindezek alapján megállapíthatjuk, hogy a PD kényszerítési értéke az SCE korrelációs protokoll alkalmazása esetében 2. Másképpen fogalmazva: a diktatórikus eszközökkel elérhető maximális társadalmi hasznosságnak legalább a fele minden PD-re elérhető az SCE protokoll alkalmazásával.

Sokkal egyszerűbb az MV mediációs érték meghatározása. Tekintsük azt a PD-t, amelynek a paraméterei $a = 1 - \varepsilon, b = 2\varepsilon$ és $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Mivel $a + b > 1$, az első eset áll fenn. Az egyetlen NEP a $2b$ SW értéket adja. Az SCE, mint az a táblázatból látható $\frac{2b}{1-a+b}$. Így az MV értéke

$$MV = \frac{\frac{2b}{1-a+b}}{2b} = \frac{1}{1-a+b} = \frac{1}{3\varepsilon}$$

amely ∞-hez tart, ha $\varepsilon \to 0$. A mediáció értéke tehát a lehető legjobb, bármilyen nagy pozitív K számhoz található olyan PD, amely esetében az SCE protokoll K-szor nagyobb társadalmi hasznosságot ad, mint a NEP.

Konklúzió és kitekintés

A cikkben áttekintettük azokat a lehetőségeket, amelyeket a korreláció és általánosításai nyújtanak többszereplős rendszerek szabályozásában. Figyelmünket elsősorban az egyszerű, kétszemélyes, kétcsatornás torlódási rendszerekre koncentráltuk, ezen belül is a puha korrelált egyensúlyra. Új eredményünk, hogy meghatároztuk a fogoly-dilemma típusú játékok mediációs és kényszerítési értékét a puha korrelált egyensúly protokolljának alkalmazása esetében. Azt találtuk, hogy az első ∞, a második pedig 2. Ezek az értékek a klasszikus korrelált egyensúly esetében a lehető legrosszabbak: 1 és ∞. Torlódási rendszerek az élet minden területén sűrűn előfordulnak. A legalaposabban és legkiterjedtebben a közlekedési rendszerekkel foglalkoztak (pl. Rozenfeld és Tennenholtz (2007)), de a mesterséges intelligencia területén is figyelmet kapott (pl. Shoham és Tennenholtz (1995a,b))

Tekintve, hogy a puha korrelált egyensúly egy viszonylag új korrelációs eszköz, sokféle speciális játék esetében lehet megvizsgálni a hatékonyságát. Természetesen adódik a fogolydilemmára elért eredmények általánosítása az n-személyes fogolydilemma különböző modelljeire. Ebben a tekintetben jó útmutató Szilagyi (2003) munkája. Egy másik irány a puha korrelált egyensúly kiterjesztése nem teljes információs játékokra. Itt is van iránytű: Ashlagi, Monderer ésTennenholtz (2008) tanulmánya.

Köszönetnyilvánítás

A kutatás az OTKA 101224 pályázat támogatásával készült.

Irodalomjegyzék

Ashlagi I, Monderer D and Tennenholz M (2008) On the value of correlation. Journal of Artificial Intelligence 33:575-613

Ashlagi I., Monderer D and Tennenholtz M. (2009) Mediators in position auctions. Games and Economic Behavior 67:2-21

Aumann RJ (1974) Subjectivity and correlation in randomized strategies. Journal of Mathematical Economics 1:67-96

Christodoulou G and Koutsoupias E (2005) On the price of anarchy and stability of correlated equilibria of linear congestion games. In Proceedings of the 13th Annual European Symposium, ESA: 59-70

Forgó F(2010) A generalization of correlated equilibrium: A new protocol. Mathematical Social Sciences 60:186-190

Forgó, F. (2014) Measuring the power of soft correlated equilibrium in 2-facility simple non-increasing linear congestion games, Central European Journal of Operations Research, 22 (1): 139-165

Moulin H and Vial J-P (1978) Strategically zero-sum games: the class of games whose completely mixed equilibria cannot be improved upon. International Journal of Game Theory 7:201-221

Rapoport A, Kugler T, Dugar S and Gisches E (2009) Choice of routes in congested traffic networks: Experimental tests of the Braess Paradox. Games and Economic Behavior 65:538-571

Roughgarden T and Tardos E (2002) How Bad is Selfish Routing? Journal of the ACM 49(2), 236-259

Rozenfeld O and Tennenholtz M (2007) Routing mediators. In Proceedings of the 23rd International Joint Conferences on Artificial Intelligence (IJCAI-07) 1488–1493.

Shoham Y and Tennenholtz M (1995a) Artificial Social Systems. Computers and Artificial Intelligence 14:533–562.

Shoham Y and Tennenholtz M (1995b) On Social Laws for Artificial Agent Societies: Off-Line Design. Artificial Intelligence 73:231–252

Szilagyi M N (2003) An investigation of N-person prisoners's dilemmas. Complex Systems 14:155-174

Young H P (2004) Strategic learning and its limits. Oxford University Press